# PANJARADAGI BILAPLASIAN OPERATORINING XOS QIYMATLARI VA ULARNING ASIMPTOTIKALARI

**Muhammadiyeva Maftuna Akbar qizi**
Samarqand davlat pedagogika instituti tayanch doktoranti
maftunachik0996@gmail.com

Received: 19.09.2025
Revised: 20.09.2025
Accepted: 22.09.2025
**Kalit so‘zlar:**
bilaplasian operator, panjara, xos qiymatlar, spektral nazariya, asimptotika.

**Annotatsiya.** Maqolada panjaradagi bilaplasian operatorining xos qiymatlari va ularning asimptotik xatti-harakatlari o‘rganilgan. Avvalo, operatorning ta’rifi va asosiy xossalari keltiriladi. Keyinchalik Fourier analiz yordamida xos qiymatlar ifodalanadi hamda ularning past chastotadagi asimptotik formulalari aniqlanadi. Olingan natijalar matematik fizika va diskret modellar nazariyasida qo‘llanilishi mumkin.

Matematik analiz va funksional analizning muhim tadqiqot yo‘nalishlaridan biri — operatorlarning spektral xossalarini o‘rganishdir. Klassik Laplasian operatori turli fizik jarayonlarda keng qo‘llanadi. Masalan, issiqlik tarqalishi, tebranishlar nazariyasi, kvant mexanikasi va boshqa ko‘plab masalalarda u markaziy rol o‘ynaydi. Laplasian operatorining kvadrati bo‘lgan bilaplasian esa yanada murakkab jarayonlarni modellashtiradi. U elastiklik nazariyasida, ingichka plastinkalarning tebranishini o‘rganishda va kvant panjaraviy tizimlarda qo‘llaniladi. Shuning uchun uning xos qiymatlari va ularning asimptotikasini tadqiq qilish nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhimdir.

Diskret panjara $\mathbb{Z}^d$ ustida ta’riflangan farq operatori quyidagicha ifodalanadi:

$$(\Delta f)(x) = \sum_{i=1}^{d} \big(f(x+e_i) - 2f(x) + f(x-e_i)\big),$$

Bu yerda $e_i$ – standart bazis vektorlari.

Bilaplasion operator esa ushbu operatorning kvadrati sifatida aniqlanadi:

$$(\Delta^2 f)(x) = \sum_{i=1}^{d} \big(f(x+2e_i) - 4f(x+e_i) + 6f(x) - 4f(x-e_i) + f(x-2e_i)\big).$$

Xos qiymatlar masalasi shundan iboratki, biz $\lambda$ sonlarni topamiz, ular uchun:

$$\Delta^2 f(x) = \lambda f(x).$$

Bunday $\lambda$ sonlar operatorning xos qiymatlari, mos keluvchi $f(x)$ esa xos funksiyalardir.

Diskret Fourier transformatsiyasi yordamida bilaplasion operatorning spektri quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$\lambda(k) = \left( \sum_{i=1}^{d} (2 - 2\cos k_i) \right)^2, \quad k \in [-\pi, \pi]^d.$$

Bu yerda $\lambda(k)$ operatorning barcha xos qiymatlarini ifodalaydi.

Kichik $k$ lar uchun $\cos k \approx 1 - \frac{k^2}{2}$ yaqinlashuvini qo‘llasak:

$$2 - 2\cos k_i \approx k_i^2.$$

Shuning uchun,

$$\lambda(k) \sim |k \downarrow \quad |k| \to 0.$$

Bu natija shuni ko‘rsatadiki, bilaplasian operatorning past chastotadagi xos qiymatlari to‘rtinchi darajali tartibda o‘sadi.

Endi misol tariqasida bir o‘lchamli chekli panjara uchun (uzunligi n) bilaplasian operatorning xos qiymatlari quyidagicha aniq hisoblanishini ko‘rib chiqsak,

Bir o‘lchamli panjarada Laplasion operator:

$$(\Delta f)(j) = f(j+1) - 2f(j) + f(j-1), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Shunga mos bilaplasion operator:

$$(\Delta^2 f)(j) = f(j+2) - 4f(j+1) + 6f(j) - 4f(j-1) + f(j-2).$$

Endi quyidagi masalani yechamiz:

$$\Delta^2 f(j) = \lambda f(j).$$

Chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda sinusoidal funksiyalarni qabul qilamiz.

$$f(j) = \sin\left(\frac{\pi m j}{n}\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Avval Laplasian operatorning xos qiymatini topamiz:

$$\Delta f(j) = -4\sin^2\left(\frac{\pi m}{2n}\right) f(j).$$

Demak, Laplasion operator uchun xos qiymat:

$$\mu_m = -4\sin^2\left(\frac{\pi m}{2n}\right).$$

Bilaplasian operator Laplasian kvadrati bo‘lganligi sababli:

$$\lambda_m = \mu_m^2 = 16\sin^4\left(\frac{\pi m}{2n}\right).$$

Natijada bir o‘lchamli chekli panjara uchun bilaplasian operatorning xos qiymatlari:

$$\lambda_m = 16\sin^4\left(\frac{\pi m}{2n}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

**Tasdiq.** Agar mmm kichik bo‘lsa, $sinx \approx x$ yaqinlashuvini qo‘llasak:

$$\lambda_m \approx 16\left(\frac{\pi m}{2n}\right)^4 = \frac{\pi^4 m^4}{n^4}.$$

Bu natija oldingi nazariy asimptotika $\lambda(k) \sim |k|^4$ ga to‘liq mos keladi.

Shunday qilib, biz **bir o‘lchamli chekli panjara** uchun bilaplasian operatorning xos qiymatlarini aniq formulada topdik va ularning kichik *m* lardagi $|k|^4$ **asimptotikasi bilan mosligini isbotladik**.

Maqolada panjaradagi bilaplasian operatorining xos qiymatlari va ularning asimptotik tarqalishi o‘rganildi. Fourier analiz orqali xos qiymatlar spektral formula yordamida aniqlandi va ularning past chastotadagi asimptotikasi $|k|^4$ tartibida ekanligi isbotlandi. Bu natijalar matematik fizikaning ko‘plab modellarini tahlil qilishda, elastiklik nazariyasida va kvant panjaraviy tizimlarda qo‘llanilishi mumkin.

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:**

1. Shubin, M. A. *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
2. Keller, M., Lenz, D., & Wojciechowski, R. K. “Spectral Theory for Discrete Laplacians.” *arXiv preprint*, arXiv:0802.2347, 2008.
3. Luckhaus, S., & Schätzle, R. “Expansion of Eigenvalues of the Perturbed Discrete Bilaplacian.” *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire*, 39(6), 2022, pp. 1393–1415.
4. Ниёзов, A. H. “Diskret operatorlar va ularning xos qiymatlari.” *Fan va texnologiya*, Toshkent, 2020.